ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LITNA AMPHONEPADID

ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ CO YẾU TRONG KHÔNG GIAN b_d - METRIC SẮP THỨ TỰ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LITNA AMPHONEPADID

ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ CO YẾU TRONG KHÔNG GIAN b_d - METRIC SẮP THỨ TỰ VÀ ỨNG DỤNG

Ngành: Toán Giải tích

Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học: **PGS.TS. Phạm Hiến Bằng**

THÁI NGUYÊN - 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Các kết quả chính của luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn Thạc sĩ của các tác giả khác.

Tôi xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện Luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong Luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Litna AMPHONEPADID

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 11 năm 2020

Tác giả

Litna AMPHONEPADID

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Nguyên lí ánh xạ co Banach là một trong những kết quả đơn giản nhưng có nhiều ứng dụng của lí thuyết điểm bất động metric. Nó là một công cụ phổ biến để chứng minh sự tồn tại của nghiệm của các bài toán trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lý ánh xạ co Banach đã được mở rộng theo hai hướng. Hướng thứ nhất là mở rộng nguyên lí ánh xạ co Banach cho các loại ánh xạ khác nhau như ánh xạ co yếu, ánh xạ dãn, ánh xạ tương thích yếu, ánh xạ tương thích,… Hướng thứ hai là thiết lập nguyên lí ánh xạ co Banach cho các không gian kiểu metric: chẳng hạn các không gian 2-metric, D-metric, b- metric, b_2 - metric, G - metric,… Năm 2000, Hitzler và Seda đã giới thiệu khái niệm d_l - metric và d_l - tôpô và thiết lập định lí điểm bất động trong không gian d_l - metric đầy đủ. Năm 2013, N. Hussain, J.R. Roshan, V. Parvaneh và M.Abbas đã giới thiệu khái niệm b_d - metric và thiết lập định lí về điểm bất động chung đối với các ánh xạ co yếu trong không gian b_d - metric. Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi chọn đề tài: "*Điểm bất động chung đối với các ánh xạ co yếu trong không gian b_d - metric sắp thứ tự và ứng dụng*". Đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

Nội dung luận văn được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [3], [6] và [8], gồm 40 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Giới thiệu khái niệm và một vài tính chất của không gian b- metric và không gian b_d - metric.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày lại các kết quả nghiên cứu gần đây của N. Hussain, J.R. Roshan, V. Parvaneh và M.Abbas về điểm bất động chung đối với các ánh xạ co yếu trong không gian b_d - metric.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian $b-$ metric

Định nghĩa 1.1.1. Cho E là một tập khác rỗng và $\lambda \geq 1$ là một số thực. Một hàm $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ được gọi là một $b-$ metric nếu với mọi $u,v,w \in E$, các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $d(u,v) = 0$ nếu và chỉ nếu $u = v$,

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$,

(iii) $d(u,v) \leq \lambda[d(u,w) + d(w,v)]$.

Cặp (E,d) được gọi là không gian $b-$ metric.

Chú ý rằng lớp các không gian $b-$ metric rộng hơn lớp các không gian metric. Thật vậy, một $b-$ metric là một metric khi và chỉ khi $\lambda = 1$.

Ví dụ 1.1.2 Không gian $l_p (0 < p < 1)$,

$$l_p = \left\{ (u_n) \subset \mathbb{R} : \sum_n |u_n|^p < \infty \right\},$$

với hàm số $d : l_p \times l_p \to \mathbb{R}^+$, xác định bởi

$$d(u,v) = (\sum_n |u_n - v_n|^p)^{1/p},$$

trong đó $u = (u_n), v = (v_n) \in l_p$ là một không gian b-metric với $\lambda = 2^{1/p}$.

Ví dụ 1.1.3. Cho (E,d) là một không gian metric và $p(u,v) = (d(u,v))^p$, trong đó $p > 1$. Khi đó p là một $b-$ metric với $\lambda = 2^{p-1}$. Thật vậy:

Hiển nhiên, các điều kiện (i) và (ii) của Định nghĩa 1.1.1 được thỏa mãn. Nếu $1 < p < \infty$ thì sử dụng tính lồi của hàm số $f(u) = u^p (u > 0)$ ta có bất đẳng thức

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}\left(a^p + b^p\right) \text{ nghĩa là, } (a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Do đó với mỗi $u, v, w \in E$, ta có:

$$p(u,v) = (d(u,v))^p \le (d(u,w) + d(w,v))^p$$

$$\le 2^{p-1}((d(u,w))^p + (d(w,v))^p) = 2^{p-1}(p(u,w) + p(w,v)).$$

Vì vậy, điều kiện (iii) của Định nghĩa 1.1.1 được thỏa mãn và p là một $b-$ metric.

Định nghĩa 1.1.4. Cho (E,d) là một không gian $b-$ metric. Khi đó, dãy $\{u_n\} \subset E$ được gọi là:

$a)$ hội tụ nếu và chỉ nếu tồn tại $u \in E$ sao cho $d(u_n, u) \to 0$, khi $n \to \infty$.

Trong trường hợp này, ta viết $\lim\limits_{x \to \infty} u_n = u$.

$b)$ dãy Cauchy khi và chỉ khi $d(u_n, u_m) \to 0$, khi $m, n \to +\infty$.

Mệnh đề 1.1.5. *Trong một không gian $b-$ metric (E,d) các khẳng định sau đây được thỏa mãn*:

$i)$ *một dãy hội tụ có giới hạn duy nhất,*

$ii)$ *mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy,*

$iii)$ *nói chung, một $b-$ metric là không liên tục.*

Định nghĩa 1.1.6. Không gian $b-$ metric (E,d) được gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong E đều hội tụ.

Nói chung, một hàm $b-$ metric d với $\lambda > 1$ không liên tục theo cả hai biến.

Sau đây là ví dụ về một $b-$ metric không liên tục.

Ví dụ 1.1.7. Cho $E = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ và $d : E \times E \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$d(m,n) = 0 \text{ nếu } m = n,$$

$$d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \text{ nếu } m, n \text{ là các số chẵn hoặc } m.n = \infty$$

$d(m,n) = 5$ nếu m, n là các số lẻ và $m \neq n$

$d(m,n) = 2$ tại m,n còn lại.

Khi đó với mọi $m,n,p \in E$, ta có

$$d(m,p) \leq 3(d(m,n) + d(n,p)).$$

Do đó, (E,d) là không gian $b-$ metric với $\lambda = 3$. Nếu $u_n = 2n$, với mỗi $n \in \infty$, thì $d(2n,\infty) = \dfrac{1}{2n} \to 0$, khi $n \to \infty$

Nghĩa là, $u_n \to \infty$, nhưng $d(u_{2n},1) = 2 \not\to d(\infty,1)$, khi $n \to \infty$

Nói chung $b-$ metric không liên tục, nên ta cần bổ đề đơn giản sau đây về các dãy $b-$ hội tụ.

Bổ đề 1.1.8. *Cho (E,d) là không gian $b-$ metric và $\{u_n\}$ là dãy trong E sao cho $u_n \to u$ và $u_n \to v$. Khi đó $u = v$.*

Bổ đề 1.1.9. *Cho (E,d) là không gian $b-$ metric, $\{u_k\}_{k=0}^{n} \subset E$. Khi đó:*

$$d(u_n,u_0) \leq \lambda d(u_0,u_1) + \ldots + \lambda^{n-1} d(u_{n-2},u_{n-1}) + \lambda^{n-1} d(u_{n-1},u_n).$$

Bổ đề 1.1.10. *Cho $\{v_n\}$ là dãy trong không gian $b-$ metric (E,d) sao cho*

$$d(v_n,v_{n+1}) \leq q d(v_{n-1},v_n)$$

với $0 < q < 1/\lambda$ và mỗi $n \in \infty$. Khi đó $\{v_n\}$ là dãy Cauchy trong E.

Bổ đề 1.1.11. *Cho (E,d) là không gian $b-$ metric với $\lambda \geq 1$. Giả sử rằng $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là $b-$ hội tụ đến u và v tương ứng. Khi đó ta có:*

$$\frac{1}{\lambda^2} d(u,v) \leq \lim_{n\to\infty} \inf d(u_n,v_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(u_n,v_n) \leq \lambda^2 d(u,v).$$

Đặc biệt, nếu $u = v$, thì $\lim_{x\to\infty} d(u_n,v_n) = 0$, hơn nữa với mỗi $w \in E$ ta có

$$\frac{1}{l}d(u,w) \le \lim_{n\to\infty}\inf d(u_n,w) \le \lim_{n\to\infty}\sup d(u_n,w) \le l\,d(u,w).$$

Định nghĩa 1.1.12. Cho (E,d) là một không gian $b-$ metric. Một cặp ánh xạ $\{f,g\}$ được gọi là tương thích nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(fgu_n, gfu_n) = 0$, trong đó $\{u_n\}$ là một dãy trong E sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} fu_n = \lim\limits_{x\to\infty} gu_n = t$, với $t \in E$ nào đó.

Định nghĩa 1.1.13. Cho f và g là định nghĩa hai tự ánh xạ trên tập không rỗng E. Nếu $w = fu = gu$ với $u \in E$, thì u được gọi là điểm trùng của f và g, trong đó w được gọi là điểm trùng nhau của f và g.

Định nghĩa 1.1.14. Cho f và g là hai tự ánh xạ xác định trên tập E. Khi đó f và g được gọi là tương thích yếu nếu chúng giao hoán tại mỗi điểm trùng.

1.2. Không gian b_d - metric

Định nghĩa 1.2.1. Cho E là tập không rỗng. Ánh xạ $d_l : E \times E \to [0,\infty)$ được gọi là d_l - metric nếu thoả mãn điều kiện sau với mọi $u,v,w \in E$:

(i) Nếu $d_l(u,v) = 0$ thì $u = v$;

(ii) $d_l(u,v) = d_l(v,u)$;

(iii) $d_l(u,v) \le d_l(u,w) + d_l(w,v)$.

Cặp (E,d_l) được gọi là không gian d_l - metric.

Chú ý rằng khi $u = v$, $d_l(u,v)$ có thể không bằng 0.

Ví dụ 1.2.2. Nếu $E = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, thì $d_l(u,v) = u + v$ xác định một d_l - metric trên E.

Định nghĩa 1.2.3. Dãy $\{u_n\}$ trong không gian d_l - metric được gọi là:

(1) dãy Cauchy nếu với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với $\forall n,m \ge n_0$, ta có $d_l(u_m,u_n) < \varepsilon$ hoặc $\lim\limits_{n,m\to\infty} d_l(u_m,u_n) = 0$.